Роберт Дорфман

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ, ИЛИ «ЛИНЕЙНОЕ», ПРОГРАММИРОВАНИЕ: НЕМАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ*

Robert DORFMAN

MATHEMATICAL, OR «LINEAR», PROGRAMMING: A NONMATHEMATICAL EXPOSITION

В настоящей статье мы намерены изложить основные идеи математического программирования,[1] освобожденные от алгебраического аппарата, который помешал их всеобщему принятию и признанию. Для этого мы сосредоточимся на графическом представлении метода. Хотя и невозможно, вообще говоря, представить задачи математического программирования на двумерных графиках, выводы, которые мы сделаем на основании этих графиков, будут применимы и в общем случае, и, конечно, само по себе графическое представление многомерных задач имеет освященное веками место в экономической науке.

Центральной формальной проблемой экономической науки является проблема распределения ограниченных ресурсов для максимизации достижения каких-либо определенных заранее целей. Стандартная формулировка этой проблемы — так называемый предельный анализ — привела к выводам, весьма важным для понимания многих вопросов социальной и экономической политики, хотя общеизвестно, что сам по себе этот вид анализа не дает рекомендаций бизнесменам для практического решения их экономических и деловых проблем. Математическое программирование основано на представлении той же самой проблемы в

---

*Опубликовано в «American Economic Review» (1953. Vol. 43, N 5, pt. 1). Печатается по этому изданию.

[1]Терминология обсуждаемых методов находится в неудовлетворительном состоянии. Наиболее часто они называются «линейным программированием», хотя включаемые в них соотношения не всегда линейны. Иногда они называются «анализом деятельностей» (activities analysis), но это название не слишком содержательно. Отличительной чертой этих методов является то, что они больше касаются программирования, чем анализа, и во всяком случае термин «анализ деятельностей» не привился. Здесь мы пытаемся ввести термин «математическое программирование»; возможно, он окажется подходящим.

форме, полезной для принятия практических решений в бизнесе. Такое математическое программирование есть не что иное, как переформулировка стандартной экономической проблемы, и ее решение есть главный тезис настоящего изложения.

Побуждающей идеей математического программирования является идея «процесса», или «деятельности». Процесс — это специфический метод для выполнения экономической задачи. Например, производство мыла по определенной формуле является процессом. Также процессом является изготовление хлопчатобумажных товаров определенного качества на определенном типе ткацких станков. Обычная производственная функция может рассматриваться как формула, связывающая все исходные ресурсы и выпуск всех процессов, посредством которых данная задача может быть выполнена.

Для некоторых задач, например производства мыла, существует бесконечное число возможных процессов. Для других, например ткачества, — только конечный набор процессов. В отдельных случаях завод или отрасль могут иметь единственный возможный процесс.

В терминах процессов выбор в сфере производства есть просто решение о том, какие процессы нужно применить и в какой степени их следует использовать. Экономисты приучены думать в терминах решений о том, какие количества различных производственных факторов следует использовать. Но отрасль или фирма не может заменить фактор A фактором B, если она не делает свою работу иным способом, т.е. если она не заменяет процесс, использующий A в относительно высоких пропорциях, процессом, использующим B. Ресурсы, таким образом, не могут быть изменены без изменения способа изготовления вещей, и часто фундаментального изменения. Математическое программирование фокусирует внимание на этом аспекте экономического выбора.

Цель математического программирования состоит в том, чтобы определить оптимальные уровни производственных процессов в данных условиях. Это требует переопределения производственных связей в терминах процессов и пересмотра влияния ограниченности ресурсов на производственные решения. В качестве прелюдии к теоретическому обсуждению, однако, будет полезно рассмотреть производственную задачу с точки зрения здравого смысла.

I. Пример математического программирования

Рассмотрим гипотетическую автомобилестроительную компанию, оснащенную для производства как легковых автомобилей, так и грузовиков. Такая компания может выполнять две экономические задачи, и мы предполагаем, что существует единственный процесс для выполнения каждой из них. Эти две задачи — производство автомобилей и производство грузовиков — конкурируют за использование производственных мощностей фирмы. Допустим, что завод компании имеет четыре цеха: 1) штамповки металлического листа, 2) сборки двигателей, 3) конечной сборки автомобилей и 4) конечной сборки грузовиков; сырье, трудовые ресурсы и все другие компоненты предполагаются доступными в фактически неограниченном количестве при постоянных ценах на открытом рынке.

Мощности каждого цеха, естественно, ограничены. Предположим, что цех металлоштамповки способен выпускать достаточно изделий для 25 тыс. автомобилей или 35 тыс. грузовиков в месяц. Тогда мы можем сосчитать комбинации изделий для автомобилей и грузовиков, которые этот цех способен производить. Так как цех может быть приспособлен для производства 25 тыс. автомобилей в месяц, каждый автомобиль требует 1/25000, или 0.004%, месячных производственных мощностей. Аналогично каждый грузовик требует 0.00286% месячных производственных мощностей. Если бы, например, были произведены 15 тыс. автомобилей, то они бы потребовали 60% производственных мощностей металлоштамповочного цеха и остающиеся 40% были бы достаточны для производства изделий для 14 тыс. грузовиков. Тогда 15 тыс. автомобилей и 14 тыс. грузовиков могли бы быть произведены этим цехом при полной загрузке. Это, конечно, не единственная комбинация автомобилей и грузовиков, которая могла бы быть произведена штамповочным цехом при полной загрузке мощности. На рис. 1 линия «Металлоштамповка» представляет все такие комбинации.

Аналогично предположим, что цех сборки двигателей имеет производственные мощности для ежемесячного выпуска 33 333 автомобильных двигателей, или 16 667 двигателей грузовиков, или, опять же, иную комбинацию меньшего числа автомобильных двигателей и двигателей грузовиков. Комбинации, которые бы поглощали полную производственную мощность цеха сборки

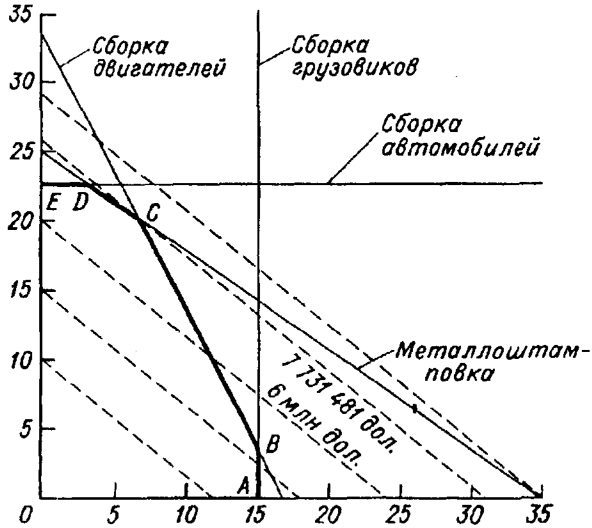

Рис. 1. Возможность выбора для автомобильной фирмы.
По оси абцисс — грузовики; *по оси ординат* — автомобили (в тыс. шт.).

двигателей, показаны на рис. 1 линией «Сборка двигателей». Мы также допустим, что цех сборки автомобилей может быть приспособлен для производства 22.5 тыс. автомобилей в месяц и цех сборки грузовиков — 15 тыс. грузовиков. Эти ограничения также представлены на рис. 1.

Мы рассматриваем этот набор предположений как определяющий два процесса: производство автомобилей и производство грузовиков. Процесс производства автомобилей дает на выходе один автомобиль и поглощает 0.004% мощности по металлоштамповке, 0.003% мощности по сборке двигателей и 0.00444% мощности по конечной сборке. Аналогично процесс производства грузовиков дает на выходе один грузовик и поглощает в качестве затрат 0.00286% мощности по металлоштамповке, 0.006% мощности по сборке двигателей и 0.00667% мощности по конечной сборке.

Экономический выбор, с которым сталкивается эта фирма, заключается в определении числа автомобилей и грузовиков, которые следует производить каждый месяц при том ограничении, что может быть использовано не более 100% производственных мощностей каждого цеха. Или, более формально, выбор состоит в решении, на каком уровне задействовать каждый из двух возможных процессов. Очевидно, если производятся только автомобили, то может выпускаться не более 22.5 тыс. единиц в месяц, так как сборка автомобилей является эффективным ограничением. Если производятся только грузовики, то может быть сделано максимум 15 тыс. единиц в месяц вследствие ограничения по сборке грузовиков. Какую из этих альтернатив нужно выбрать или же следует производить некоторую комбинацию из грузовиков и автомобилей, зависит от относительной прибыльности производства грузовиков и автомобилей. Допустим, чтобы быть конкретными, продажная цена автомобиля на 300 дол. больше, чем полные затраты на покупку материалов, труда и другие прямые расходы, относящиеся к его производству. И аналогично продажная цена грузовика превышает на 250 дол. прямые затраты на его производство. Тогда чистый доход завода за любой месяц есть 300 дол., умноженное на число произведенных автомобилей, плюс 250 дол., умноженное на число грузовиков. Например, 15 тыс. автомобилей и 6 тыс. грузовиков дали бы чистый доход в 6 млн дол. Существует много комбинаций автомобилей и грузовиков, которые давали бы такой же чистый доход; 10 тыс. автомобилей и 12 тыс. грузовиков — это одна из них. В обозначениях рис. 1 все комбинации с чистым доходом в 6 млн дол. лежат на прямой линии.

Каждому возможному значению чистого дохода соответствует линия, аналогичная только что описанной. Все эти линии параллельны, так как их наклон зависит только от относительной прибыльности двух операций. Конечно, чем больше чистый доход, тем выше соответствующая линия. Несколько линий чистого дохода показаны на рис. 1 параллельными прерывистыми линиями.

Каждое возможное число произведенных автомобилей и грузовиков соответствует точке на диаграмме, и через каждую точку здесь проходит одна из семейства линий чистого дохода. Чистый доход достигает максимума, когда точка, соответствующая числу произведенных автомобилей и грузовиков, лежит на наивысшей возможной линии чистого дохода. Далее, ограничения по произведенным мощностям лимитируют область выбора объемов производства точками, лежащими внутри фигуры, ограниченной осями и ломаной линией $ABCDE$. Так как чистый доход возрастает по мере удаления от начала координат, имеет смысл рассматривать только точки, лежащие на самой ломаной линии. Тогда — начиная из точки A и двигаясь вдоль ломаной — мы видим, что граница допустимой области пересекает все более высокие линии чистого дохода вплоть до достижения точки C. Отсюда граница скользит вниз по шкале линий чистого дохода. Таким образом, точка C соответствует наивысшему достижимому чистому доходу. В точке C объем производства составляет 20 370 автомобилей и 6481 грузовик, что дает чистый доход в 7 731 481 дол. в месяц.

Читатель уже, вероятно, заметил, что эта диаграмма, вне сомнения, нечто новое. Ломаная линия $ABCDE$ характеризует максимальное число автомобилей, которое может быть произведено при любом заданном количестве грузовиков. Это, таким образом, если не говорить о ломаности, кривая производственных возможностей, или кривая трансформации, типа, ставшего известным благодаря Ирвингу Фишеру; и наклон кривой во всех точках, где она имеет касательную, есть норма замещения автомобилей и грузовиков в производстве. Новым является то, что кривая производственных возможностей, показанная здесь, не имеет определенной касательной в пяти точках и что одна из этих пяти точек есть критическая точка. Прерывистые линии на диаграмме эквивалентны обычным линиям цен.

Стандартная теория производства учит, что прибыль достигает максимума в точке, где линия цен касается кривой производственных возможностей. Но, как мы только что отметили, есть пять точек, где наша кривая производственных возможностей не имеет касательной. Таким образом, критерий касания теряет силу. Вместо этого мы нашли, что прибыль достигает максимума в углу, где наклон линии цен не меньше, чем наклон кривой возможностей слева от вершины угла, и не больше, чем наклон кривой возможностей справа.

Графически, таким образом, математическое программирование использует углы там, где стандартная экономика использует кривые. В чем новизна с экономической точки зрения? В стандартном экономическом анализе мы представляем себе производственные взаимосвязи так, что если есть два продукта, то один может быть заменен другим с постепенно возрастающей трудностью. В математическом программировании мы представляем себе режим производства, в котором для всякого объема выпуска продукции одни ресурсы будут эффективно ограничивающими, а другие могут доставляться в достаточном количестве. Таким образом, на рис. 1 факторы, которые эффективно ограничивают производство в каждой точке, могут быть идентифицированы, если заметить, на каких ограничительных линиях эти точки лежат. Норма замещения продуктов определяется только лимитирующими факторами и меняется только тогда, когда меняется тип ограничивающих факторов. На диаграмме изменение ограничивающих факторов представляется поворотом угла на кривой производственных возможностей.

Мы вернемся к этому примеру позже, так как не исчерпали его содержания. Но теперь мы в состоянии развить с большей общностью некоторые понятия, используемые в математическом программировании.

II. Модель производства в математическом программировании

Классической задачей в экономике является оптимальное использование двух факторов производства, называемых обычно капиталом и трудом.

В обычном анализе проблема формулируется посредством представления двух факторов как кооперируемых друг с другом в соответствии с производственной функцией, определяющей максимальное количество продукта, которое можно получить при использовании данных количеств двух факторов. Обычно на графике такая производственная функция представляется изоквантами, как на рис. 2. На этом известном рисунке количества труда отложены вдоль горизонтальной оси и количества капитала — вдоль вертикальной. Каждая из дуг на диаграмме, или изокванта, соответствует определенному объему выпуска продукции, более высокие дуги соответствуют большим объемам.

Если цены на единицу капитала и труда известны, комбинации труда и капитала, которые могут быть закуплены при фиксированных общих расходах, могут быть показаны наклонной прямой линией, как CC' на рисунке, причем наклон определяется только относительными ценами. Здесь нужно дать два пояснения. Первое — минимальные затраты на единицу продукции,

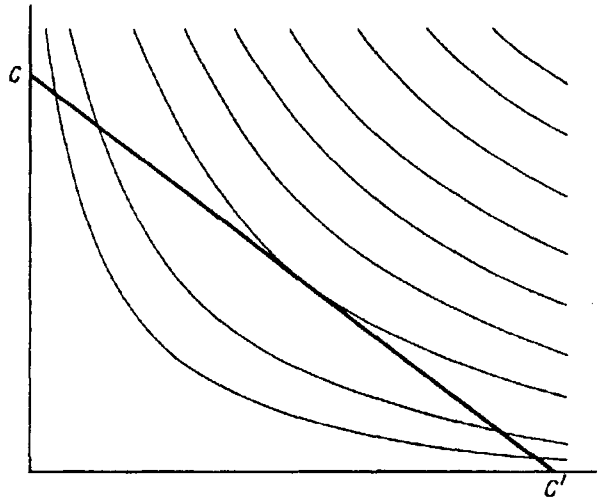

Рис. 2. Диаграмма изоквант.
Здесь и на рис. 3–7 *по оси абцисс* — труд; *по оси ординат* — капитал.

представленной любой изоквантой, могут быть достигнуты путем использования комбинации труда и капитала, соответствующей точке, где эта изокванта касается линии цен. Второе — наибольший выпуск продукции, достижимый при заданных затратах, представляется изоквантой, касающейся линии цен, соответствующей этим затратам.

Эта диаграмма и ее анализ опираются на допущение, что два фактора могут непрерывно замещаться один другим: если количество используемого труда немного уменьшается, то можно будет поддержать объем выпускаемой продукции *малым* увеличением количества используемого капитала. Более того, этот анализ допускает, что каждая последующая единица сокращения количества труда будет требовать немного большего увеличения количества капитала, если выпуск продукции должен оставаться постоянным. В противном случае изокванты не будут иметь необходимую форму.

Все это хорошо известно. Мы напоминаем об этом только потому, что намереваемся предложить аналогичную диаграмму, которая является фундаментальной для математического программирования. Сначала, однако, давайте посмотрим, почему ощущается необходимость в новой диаграмме и новом подходе.

Модель производства, которую мы только что обрисовали, весьма вероятно, годится для некоторых видов производства. Но для большинства обрабатывающих отраслей промышленности и, несомненно, всех производств, где используется сложное машинное оборудование, она уязвима при серьезной критике. Характерным для большинства современных машин является то, что каждый вид машин эффективно работает только в узком диапазоне скоростей и что количества труда, энергии, материалов и других факторов, которые требуются машинам, диктуются весьма жестко заложенными в машину характеристиками. Далее, в любой момент времени только небольшое число различных видов машин приспособлено для выполнения данной задачи. Несколько примеров могут сделать эти соображения более конкретными. Земля может быть перемещена ручной лопатой, паровым или дизельным экскаватором или бульдозером. Мощные экскаваторы и бульдозеры имеют только небольшое разнообразие моделей, каждая с присущими характеристиками, как-то: расход топлива в час, число требуемых операторов и помощников, кубические футы земли, перемещаемой в час, и т. д. Печатный шрифт может набираться вручную или на линотипных или монотипных машинах. Наконец, каждая машина может существовать только в нескольких моделях и каждая имеет свой собственный принцип действия, энергетические и пространственные требования и другие, по существу неизменяемые характеристики. Небольшое размышление тотчас приводит на ум дюжины других иллюстраций: печатные прессы, мощные ткацкие станки, перевозка по железной и шоссейной дороге, статистический и бухгалтерский расчет, обогащение металлической руды, производство металла и т. д. Для многих экономических задач набор пригодных процессов конечен, и каждый процесс может рассматриваться как негибкий с точки зрения отношений между вводимыми факторами и результатом процесса. Факторы не могут замещать друг друга без изменения уровней использования технических процессов в целом, потому что каждый процесс использует факторы в постоянных характерных отношениях. Соответственно в математическом программировании замещение процессов играет роль, аналогичную замещению факторов в обычном анализе.

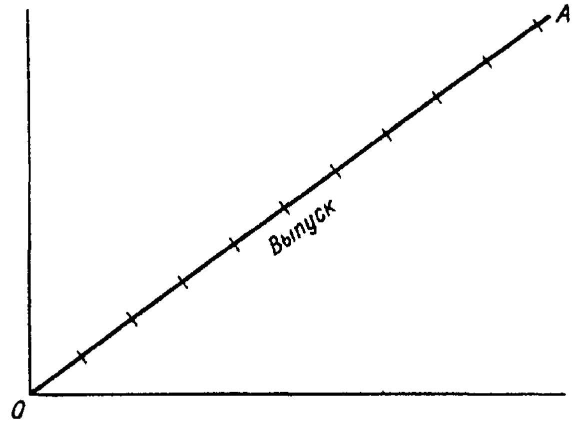

Рис. 3. Один процесс.

Теперь мы разовьем аппарат для анализа замещения процесса. Для удобства мы ограничим наше обсуждение процессами, в которых используются два фактора, называемые трудом и капиталом, и производится единственный вид продукции. Рис. 3 представляет такой процесс. Как и на рис. 2, горизонтальная ось проградуирована в единицах труда и вертикальная — в единицах капитала. Процесс представляется лучом OA, который проградуирован в единицах выпуска продукции. Необходимый каждому объему выпуска труд определяется посредством нахождения подходящей отметки на луче процесса и переноса ее вертикально вниз. Требуемый капитал находится таким же образом — путем считывания по горизонтали от отметки на линии процесса. Аналогично каждому количеству труда соответствует количество продукции, определяемое путем считывания вертикально вверх, и количество капитала, находимое считыванием по горизонтали от отметки выпуска продукции.

Следует заметить, что количество капитала на этой диаграмме есть скорее количество, использованное в процессе, чем количество, находящееся в собственности экономических агентов; это скорее услуги капитала, чем капитал сам по себе. Таким образом, хотя труд и может быть связан с данной машиной в большей или меньшей степени — путем ее использования в течение большего или меньшего количества часов, — отношение затрат капитала к затратам труда, т. е. отношение машино-часов к человеко-часам, рассматривается как технологически фиксированное.

Рис. 3 объединяет два важных допущения. Поскольку линия OA прямая, это подразумевает, что отношение между затратами капитала и затратами труда остается одним и тем же для всех уровней выпуска продукции и задано, естественно, наклоном этой линии. Отметки на линии объема выпуска продукции на одинаковом расстоянии друг от друга показывают, что не существует ни экономии, ни потерь при изменении масштаба производства при использовании процесса, т. е. что будет существовать строгая пропорциональность между выпуском продукции и качеством каждого фактора производства. Эти допущения оправдываются довольно просто на основе представления о процессе. Если процесс может быть использован один раз, он может быть использован дважды или столь много раз, сколько позволяет поставка ресурсов. Две линотипные машины с равноумелыми операторами могут набирать ровно в два раза больше текста в час, чем одна. Две одинаковые фабрики могут вырабатывать ровно в два раза больше ярдов хлопчатобумажной ткани в месяц, чем одна. До тех пор пока ресурсы находятся в наличии, процесс может быть повторен. Конечно, будет ли экономично поступать таким образом — это другой вопрос.

Если есть только один подходящий для данной задачи процесс, то не существует большого поля для экономического выбора. Часто, однако, может существовать несколько процессов.

Рис. 4 представляет ситуацию, в которой возможны два процесса — процесс A, показанный линией OA, и процесс B, показанный линией OB. Мы уже выяснили, как интерпретировать точки на линиях OA и OB. Масштабы, которыми измеряется выход продукции на двух лучах, не обязательно одинаковы. Масштаб на каждом луче отражает продуктивность факторов при их использовании в соответствующем процессе и не связан с масштабом выпуска продукции на луче любого другого процесса. Теперь предположим, что точки L и M представляют производство одинаковых объемов продукции в результате двух процессов. Тогда LM, прямая линия между ними, будет представлять собой изокванту и каждая точка этой линии будет соответствовать комбинации процессов A и B, обеспечивающей выпуск того же объема продукции, что и OL единиц посредством процесса A или OM единиц посредством процесса B.

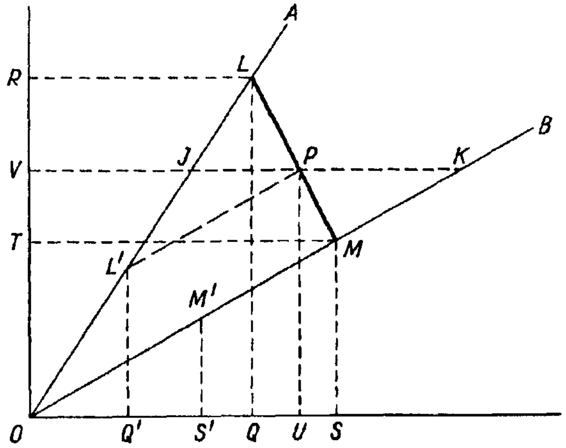

Рис. 4. Два процесса.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольную точку P на линии LM и проведем через P линию, параллельную OB. Пусть L' есть точка, где эта линия пересекает OA. Наконец, отметим точку M' луча OB, такую, чтобы $OM' = L'P$. Теперь рассмотрим план производства, который состоит в использовании процесса A при уровне OL' и процесса B при уровне OM'.[2] Легко показать, что этот план производства использует OU единиц труда, где U — трудовая координата точки P, и OV единиц капитала, где V — капитальная координата точки P.[3]

Так как координаты точки P соответствуют количествам используемых ресурсов при OL' единицах процесса A и OM' единицах процесса B, мы интерпретируем точку P как представля-

[2] Альтернативное построение состояло бы в проведении линии через точку P параллельно OA. Она пересекла бы OB в точке M'. Тогда мы могли бы отложить OL', равный $M'P$, на OA. Это привело бы к совершенно таким же результатам, как и те, что рассмотрены в тексте. Ситуация аналогична «параллелограмму сил» в физике.

[3] Доказательство. Процесс A при уровне OL' использует OQ' единиц труда. Процесс B при уровне OM' использует OS' единиц труда, вместе они используют $OQ' + OS'$ единиц труда. Но по построению $L'P$ равен и параллелен OM'. Тогда $Q'U = OS'$. Поэтому $OQ' + OS' = OQ' + Q'U = OU$ единиц труда. Аргументация в том, что касается капитала, аналогична.

ющую объединенный производственный план, составленный из определенных уровней использования двух процессов. Эта интерпретация подразумевает важное экономическое упущение, а именно: если два процесса используются одновременно, они не препятствуют друг другу, не усиливают друг друга, так что ресурсы производства и выпуск продукции, полученный при одновременном использовании двух процессов, при любых уровнях могут быть найдены сложением ресурсов и продукции отдельных процессов.

Для того чтобы показать, что P лежит на изокванте, соединяющей точки L и M, остается только доказать, что сумма объемов продукции, соответствующих точкам L' и M', та же, что и объем продукции, соответствующий точке L или M. Это сразу следует из того факта, что объем продукции, соответствующий любой точке на луче процесса, прямо пропорционален длине луча до этой точки, и из того, что треугольники $LL'P$ и LOM на рис. 4 подобны.[4] Таким образом, если мы имеем два луча процессов OA и OB и находим на них точки L и M, которые представляют производство одинакового объема продукции посредством обоих процессов, тогда отрезок, соединяющий две точки равного объема продукции, будет изоквантой.

Мы теперь можем привести аналог знакомой диаграммы изоквант на языке математического программирования. Рис. 5 как раз и есть такая диаграмма с лучами, представляющими четыре процесса. Точка M показывает некоторый выпуск продукции при использовании процесса A, и точки L, K, J представляют такой же выпуск продукции при использовании процессов B, C, D соответственно. Совокупность отрезков, соединяющих эти четыре точки, является изоквантой для одного и того же выпуска продукции. Легко видеть, что любые другие последовательные совокупности отрезков, параллельных $MLKJ$, также являются изоквантами. Три такие линии показаны на рисунке. Поучи-

---

[4]Доказательство: пусть (X) обозначает объем продукции, отвечающий любой точке X на диаграмме. Тогда $(M')/(M) = OM'/OM$ и $(L')/(L) = OL'/OL$. По предположению $(L) = (M)$. Тогда $(M')/(L) = OM'/OM$. Складывая, получаем

$$\frac{(M')+(L')}{(L)} = \frac{OM'}{OM} + \frac{OL'}{OL} = \frac{L'P}{OM} + \frac{OL'}{OL} = \frac{L'L}{OL} + \frac{OL'}{OL} = 1.$$

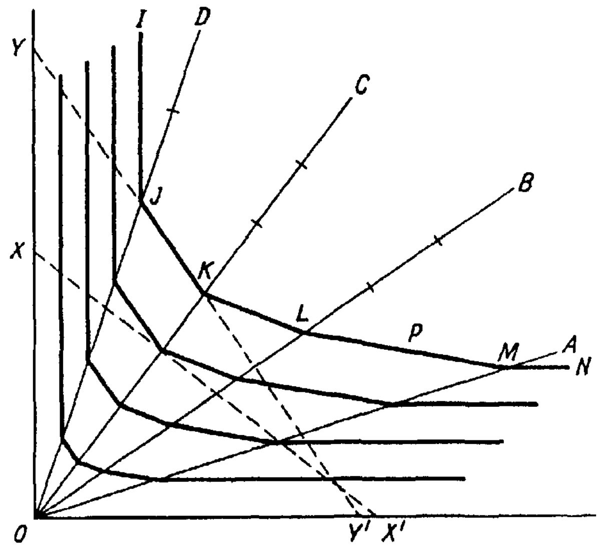

Рис. 5. Четыре процесса.

тельно сравнить рис. 5 с рис. 2 и заметить большое сходство как в общем виде, так и в интерпретации.

Мы можем провести линии цен на рис. 5 точно так, как на обычной диаграмме изоквант. Прерывистые линии XX' и YY' представляют две возможные линии цен. Рассмотрим сначала XX'. При том, как проведена эта линия, максимальный выход продукции при заданных затратах может быть получен при использовании одного процесса C и, наоборот, минимальные затраты при данном объеме продукции так же получаются при использовании одного процесса C. Так, при соотношении цен, представленном XX', процесс C является оптимальным. Линия цен YY' проведена параллельно отрезку изокванты JK. В этом случае процесс C все еще остается оптимальным, но процесс D также является оптимальным, и это справедливо для любой комбинации этих двух процессов.

Из рассмотрения двух линий цен и столь многих других, сколько читатель пожелает себе представить, очевидно, что оптимальная программа производства может быть всегда достигнута посредством единственного процесса, который, конечно, зависит от наклона линии цен. Следует отметить, однако, что обычный критерий касания больше неприменим.

Как видно из рис. 5, оптимальный экономический план никогда не нуждается в использовании больше чем одного процесса для каждого объема выпуска продукции.[5] Это заключение пригодно для описанной ситуации, которая предполагает, что поставка двух ресурсов может быть обеспечена в любых желаемых количествах при постоянных относительных ценах. Данное допущение неприменимо ко многим экономическим проблемам да и не слишком часто используется в математическом программировании. Мы теперь должны, следовательно, принять во внимание условия обеспечения ресурсами.

III. Обеспечение ресурсами и затраты

Для математического программирования является обычным делить все ресурсы производства на два класса: неограниченные ресурсы, которые доступны в любом желаемом количестве при постоянных затратах на единицу ресурса, и ограниченные, или редкие, ресурсы, которые могут быть получены при постоянных затратах на единицу ресурса вплоть до фиксированного максимального количества, после чего они не могут быть получены совсем. Пример с автомобилями иллюстрирует эту классификацию. Там четыре вида производственных мощностей рассматривались как фиксированные ресурсы, доступные при нулевых переменных затратах; все остальные ресурсы были сгруппированы по прямым затратам, которые рассматривались как постоянные на единицу выпуска продукции.

Пример с автомобилями показал, что эта классификация ресурсов является адекватной для представления проблемы максимизации для фирмы, имеющей дело с конкурентным рынком. В последнем разделе мы увидели, что, когда все ресурсы безграничны, данная формулировка может быть использована для нахождения точки минимума средних затрат.

Оба эти приложения использовали ограничительные допущения и, более того, такие, которые находятся в противоречии с допущениями, обычными при изучении распределения ресурсов. В стандартном анализе мы представляем себе, что по мере того как уровень производства фирмы, отрасли или экономики ра-

[5] Напомним, однако, что мы не принимали во внимание ни совместное производство, ни эффекты, лежащие на стороне спроса.

стет, средние затраты на единицу продукции также растут после некоторой точки. Увеличение средних затрат приписывается в свою очередь действию закона изменяющихся пропорций,[6] который проявляется, когда ввод некоторых, но не всех факторов производства нарастает. В том, что касается последствий увеличения некоторых, но не всех вводимых факторов производства, контраст между математическим программированием и предельным анализом более терминологический, нежели существенный. Ссылка на рис. 4 показывает, как такие изменения трактуются в математическом программировании. Точка J на рис. 4 представляет производство некоторого количества продукции посредством только процесса A. Если желательно увеличить выпуск продукции без увеличения использования капитала, это может быть сделано продвижением вправо вдоль прерывистой линии JK, так как эта линия пересекает последовательно все более высокие изокванты. Такое движение соответствовало бы нарастающему использованию процесса B и нарастающему сокращению использования процесса A и, таким образом, опосредованно соответствовало бы замещению капитала трудом. Если далее мы допустим, что единица затрат на производство ниже для процесса A, чем для процесса B, это движение также будет соответствовать увеличению средних затрат на производство. Следовательно, как предельный анализ, так и математическое программирование ведут к одинаковым выводам при изменении пропорций ресурсов: если изменение начинается с точки минимума затрат, то замена будет приводить к постепенному увеличению затрат на единицу продукции.

Но изменение пропорций вводимых факторов производства — это только одна сторона происходящего в соответствии с обычным типом анализа. Если выпуск продукции должен быть увеличен, то может случиться одно из трех. Первое — может оказаться возможным увеличить ввод всех ресурсов производства, не подвергая изменению цены ресурсов. В этом случае как математическое программирование, так и предельный анализ согласны в том, что выпуск продукции будет расширяться без изменения, при этом отношения между количествами вводимых факторов и

[6] Ср.: *Cassels J. M.* On the Law of Variable Proportions // Readings in the Theory of Income Distribution / Ed. by W. Fellner a. B. F. Haley. Philadelphia, 1946.

средними затратами производства не будут увеличиваться.[7] Второе — может быть невозможным увеличение использования некоторых ресурсов. Это тот случай, который мы только что анализировали. В соответствии с обоими видами анализа соотношения вводимых факторов производства будут в данном случае меняться и средние расходы на единицу продукции будут расти. Единственное различие между двумя подходами состоит в том, что, если средние затраты отложены на графике как функция объема выпуска продукции, сторонник предельного анализа покажет картинку с гладко нарастающей кривой, в то время как адепт математического программирования покажет ломаную линию, составленную из отрезков возрастающей крутизны. Третье — может быть возможно увеличить количества всех ресурсов, но только за счет увеличения цен за единицу ресурса или некоторого другого отрицательного экономического эффекта, обусловленного увеличением масштабов деятельности. Третий случай имеет место в предельном анализе. Несомненно, это случай, который придает кривым затрат длительного периода их привычный вид, но в математическом программировании ему аналога нет.

Достаточно существенное различие, к которому мы пришли, заключается в том, что предельный анализ принимает во внимание денежную и техническую неэкономичность, сопровождающую изменение масштаба производства, а математическое программирование — нет.[8] Существует много важных экономических задач, в которых цены на ресурсы и производительность не меняются в ответ на изменение масштаба производства или в которых таким изменением можно пренебречь. В большинстве отраслей, как показывают исследования производственной мощности, положение именно таково. В них мы ищем максимум объема производства отрасли, рассматривая ее фонд физического оборудования как заданный и допуская, что дополняющие ресурсы,

---

[7] Ср.: *Knight F. H.* Risk, Uncertainty and Profit. Boston, 1921. P. 98.

[8] Даже в рамках предельного анализа концепция неэкономичности от увеличения масштабов производства оспаривалась как на теоретическом, так и на эмпирическом уровне. Для примеров эмпирической критики см.: Committee on Price. Determination. Conference on Price Research // Cost Behavior and Price Policy. New York, 1943. Наиболее тщательная теоретическая критика содержится в работе: *Sraffa P.* The Laws of Returns under Competitive Conditions // Econ. Journ. 1926. Vol. 36. Dec.

необходимые для обеспечения работы оборудования, могут быть получены в количествах, определяемых его характеристиками. Исследования потребности в людских ресурсах той же природы. В них берется объем производства и оборудование как заданные и находится количество рабочей силы, необходимое для функционирования оборудования на уровне, который даст желаемый объем продукции. Исследования выпуска продукции при полном использовании ресурсов укладываются в ту же схему. В них мы сначала определяем количество каждого ресурса, предполагая полное его использование. Затем подсчитывается оптимальный выход продукции, который можно получить при использовании ресурсов в таких количествах. Эти иллюстрации должны быть достаточны, чтобы показать, что допущения, которые делаются в математическом программировании, позволяют охватить широкое разнообразие экономических задач. Наиболее полезные приложения математического программирования относятся, вероятно, к проблемам только что описанного типа, т. е. к проблемам, касающимся нахождения оптимального плана производства, использующего определенные количества некоторых или всех включенных в процесс производства ресурсов.

IV. Анализ производства с ограниченными ресурсами

Диаграммы, которые мы построили, могут быть легко приспособлены к анализу последствий ограничений на снабжение ресурсами. Такие ограничения, конечно, лежат в основе рис. 1, где четыре главные линии представляют ограничения на уровни процесса, обусловленные ограничениями на количества рассмотренных четырех ресурсов. Но рис. 1 не может быть использован, когда должны рассматриваться более чем два процесса. Для таких задач следует применять диаграммы, подобные рис. 3–5.

Рис. 6 воспроизводит ситуацию, описанную на рис. 5, с некоторыми дополнительными данными, объясняемыми ниже.

Пусть OF представляет максимальное количество капитала, которое может быть использовано и, таким образом, характеризует ограничение ресурсов. Горизонтальная линия, проведенная через F, делит диаграмму на две секции: все точки выше линии соответствуют программам, которые требуют больше капитала,

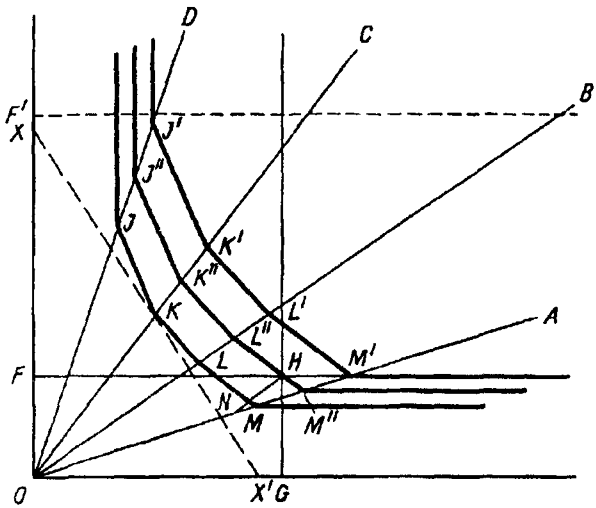

Рис. 6. Четыре процесса с ограничениями.

чем имеется в наличии; точки на линии и ниже представляют программы, которые не увеличивают требований на капитал. Эта горизонтальная линия будет называться линией ограничения капитала. Точки на или ниже нее называются «осуществимыми», точки выше нее — «неосуществимыми».

Экономическая единица, представленная на рис. 6, может действовать в любой осуществимой точке. Если ее целью является максимальный объем производства продукции, она будет выбирать точку, которая лежит на возможно более высокой изокванте, т.е. наивысшую изокванту, касающуюся линии ограничения капитала. Это линия, $J'K'L'M'$, и наивысший возможный выход продукции достигается при использовании процесса A.

Конечно, максимум выпуска продукции может и не быть целью. Целью может быть, например, максимизация превышения ценности выпускаемой продукции над расходами по оплате труда. Мы будем говорить об этом превышении как о «чистой ценности». Диаграмма такого же вида может быть использована для решения задачи о том, чтобы при заданной чистой ценности стоимость каждой единицы продукции была независима от чи-

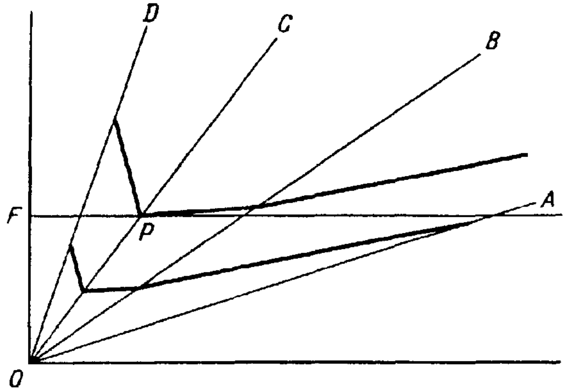

Рис. 7. Четыре процесса с линиями равной ценности.

сла произведенных единиц[9] и чтобы затраты на каждую единицу труда были также постоянны. Если эти условия удовлетворены, каждая точка на луче процесса будет соответствовать не только некоторому физическому объему производства, но и некоторой стоимости продукции, затратам на рабочую силу и чистой ценности продукции. Далее, вдоль любого луча процесса чистая ценность продукции будет равна физическому выходу продукции, умноженному на чистую ценность единицы продукции, и потому будет пропорциональна физическому объему продукции. Мы можем, таким образом, использовать диаграмму, сходную с рис. 6, с той поправкой, что мы имеем в виду чистую ценность на единицу продукции вместо физического объема продукции, измеряемую вдоль лучей процессов, и мы показываем линии одинаковой ценности (isovalue) вместо изоквант. Это сделано на рис. 7, на котором максимальная достижимая чистая ценность соответствует линии одинаковой ценности, проходящей через точку P, и достигается при использовании процесса C.

Следует отметить, что на рис. 6 и 7 оптимальная программа состояла из единственного процесса, а также что сдвиги в количестве доступного капитала не повлияли на тип оптимального процесса, хотя меняли его уровень, и что, наконец, линии цены, которые были решающими на рис. 5, здесь не играли роли.

[9]Это особенно неудобное допущение; мы используем его здесь, чтобы объяснить метод в его наименее сложной форме.

Следующее и последнее усложнение, которое мы должны рассмотреть, состоит в допущении того, что снабжение обоими ресурсами ограничено. Эта ситуация показана на рис. 6 добавлением вертикальной линии, проходящей через точку G, чтобы представить ограничение по рабочей силе. Возможное количество рабочей силы показано, конечно, длиной OG. Тогда точки внутри прямоугольника $OFHG$ представляют программы, которые могут быть приведены в исполнение в том смысле, что они не требуют больше ресурсов, чем имеется в наличии. Это прямоугольник осуществимых программ. Наибольший достижимый выход продукции — такой, который соответствует наивысшей изокванте, касающейся прямоугольника осуществимых программ. Это изокванта $J''K''L''M''$, и, более того, так как максимальная изокванта касается прямоугольника в точке H, то H представляет программу, посредством которой максимальный объем продукции и может быть произведен.

Данное решение отличается от предыдущих тем, что точка-решение лежит не на каком-либо луче процесса, а между лучами процессов A и B. Мы уже видели, что точка типа H представляет использование процесса A при уровне ON и процесса B при уровне NH (рис. 6).

К этому решению необходимо сделать два замечания. Первое. При показанных на рисунке линиях ограничения ресурсов максимальный выпуск продукции требует двух процессов. Если линии ограничения ресурсов были бы нарисованы так, что они пересекались бы точно на одном из лучей процесса, то требовался бы только один процесс. Если бы линии ограничения ресурсов пересекались слева от процесса D или справа от процесса A, то максимизирующий план производства потребовал бы только одного процесса. Но как бы ни выглядели ограничительные линии, для достижения максимального выпуска продукции требуется не более двух процессов. Мы приходим к важному обобщению: максимальный объем производства всегда может быть получен при использовании такого числа процессов, которое не превышает числа ограниченных факторов, если это число больше нуля. Выводы, которые мы получили из рис. 6 и 7, согласуются с данным правилом, и это одна из основных теорем математического программирования.

Второе. Хотя для получения максимума выпуска продукции требуется не более двух процессов, то какими именно они будут, зависит от положения линий ограничения по ресурсам. Как было показано, процессы, используемые для максимального выпуска продукции, были процессами A и B.

Если бы несколько больший капитал, представленный количеством OF', был бы доступен, то максимизирующими были бы процессы C и D. Если два ресурса ограничены, то именно отношение между их поставками скорее, чем абсолютные значения поставки любого из них, определяет процессы в оптимальной программе. Это контрастирует со случаем, в котором только один ресурс ограничен. Как соображения, определяющие оптимальный набор процессов, являются более сложными, когда ограничены два фактора, чем тогда, когда ограничен только один, так и в случае трех или более ограниченных факторов оптимальные условия становятся все более сложными и вскоре превосходят возможность интуитивного понимания. Это, несомненно, *raison d'être*[10] сложного аппарата математического программирования.

Мы можем сделать подобные соображения более конкретными, приложив их к примеру с автомобилями. Рассматривая рис. 1, мы замечаем, что точка оптимального производства C лежит на линиях ограничения для сборки двигателя и штамповки металла, но много ниже ограничений для сборки автомобилей и грузовиков. Ограничения по сборке автомобилей и грузовиков, таким образом, неэффективны и могут не рассматриваться. Ситуация в терминах двух эффективно ограничивающих типов мощностей показана на рис. 8.

На рис. 8 луч P_A представляет процесс производства автомобилей и P_T — процесс производства грузовиков. Эти два процесса могут быть задействованы в любой комбинации уровней, которая не требует использования более чем 100% мощности как металлоштамповки, так и сборки двигателей. Таким образом, прямоугольник на диаграмме есть область осуществимых производственных программ. Оптимальная производственная программа — это такая программа из осуществимой области, которая соответствует наивысшему возможному чистому доходу.[11]

---

[10] Причина существования (*фр.*). (Прим. пер.)

[11] Так как целью фирмы является по предположению максимизация скорее дохода, нежели физического выхода продукции, мы можем рассмотреть производство автомобиля и грузовика как два альтернативных процесса для производства дохода вместо двух процессов с несравнимыми выпусками продукции.

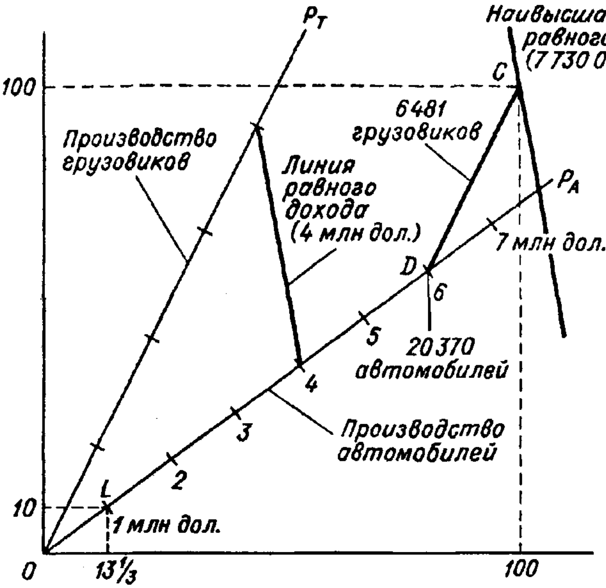

Рис. 8. Пример с автомобилями. Оптимальный план.
По оси абсцисс — мощность цеха металлоштамповки;
по оси ординат — мощность цеха сборки деталей (в %).

Следовательно, будет полезно построить линии равного дохода (isorevenue), как на рис. 7. Сначала сделаем это, рассматривая производство автомобилей. Каждая точка на P_A соответствует производству некоторого количества автомобилей в месяц. Предположим, например, что масштаб таков, что точка L представляет производство 3333 автомобилей в месяц. Напомним, что каждый автомобиль дает чистый доход в 300 дол. Таким образом, 3333 автомобиля дают доход в 1 млн дол. Точка L тогда соответствует чистому доходу в 1 млн дол. так же, как и выпуску продукции в 3333 автомобиля в месяц. Так как (см. I раздел) 3333 автомобиля требуют 13 1/3% мощности металлоштамповки и 10% мощности сборки двигателей, координаты точки чистого дохода в 1 млн дол. на P_A устанавливаются сразу. По аналогичным аргументам точка с координатами 26 2/3% мощности металлоштамповки и 20% мощности сборки двигателей есть точка чистого дохода в 2 млн дол. на P_A. Тем же способом весь луч может быть проградуирован в терминах чистого дохода, и то же может быть сделано на луче P_T производства грузовиков. Построение диаграммы заканчивается соединением точек 4 млн дол. на двух линиях процессов с целью показать направление линий чистого дохода.

Оптимальная программа — это точка C, где пересекаются две линии предельной мощности, потому что C лежит на наивысшей линии равного дохода, которая касается допустимой области. Через точку C мы провели линию, параллельную линии производства грузовиков и достигающую линии производства автомобилей в точке D. По нашим прежним соображениям, длина OD представляет собой чистый доход от производства автомобилей при оптимальной программе и длина DC представляет чистый доход от производства грузовиков. Если эти длины отградуированы, то результат, конечно, будет таким же, как и в случае ранее найденного решения.

V. Вменение ценности производственным факторам

Мы только что заметили, что главное поле приложения математического программирования относится к проблемам, где снабжение производства одним ресурсом или более абсолютно ограничено. Такие ограничения являются источником ценности в обычном анализе, и они также генерируют ценность в математическом программировании. Действительно, в обычном анализе определение объемов продукции и определение цен, за исключением двух аспектов, — это одна и та же задача оптимального распределения ограниченных ресурсов. То же справедливо и для математического программирования.

До сих пор мы сталкивались с ценами только как данными для определения прямых затрат процессов и чистой ценности выпуска продукции. Но, конечно, ограничивающие факторы производства также имеют ценность, хотя мы до сих пор не приписывали им цен. В этом разделе мы увидим, что решение проблемы математического программирования неявно приписывает ценности ограничивающим факторам производства. Более того, подразумеваемая проблема назначения цены может быть решена прямо и, будучи решенной таким образом, составляет решение задачи оптимального распределения.

Рассмотрим пример с автомобилями и спросим: сколько стоит единица (1%) каждого из типов мощностей для фирмы? Подход к этому вопросу похож на известный предельный анализ. Для каждого типа мощностей мы считаем, насколько максимальный доход повысился бы, если бы еще одна единица была добавлена, или насколько доход снизился бы, если бы одна единица была устранена. Так как существует излишек мощности по сборке автомобилей, ни добавление, ни вычитание одной единицы этого типа не повлияло бы на оптимальную программу или максимальный чистый доход. Следовательно, ценность этого вида мощности равна нулю. Анализ и результат для сборки грузовиков те же самые.

Мы заключаем тогда, что эти два типа мощностей есть бесплатные блага. Это не значит, что сборка автомобилей не стоит ничего; классический пример о воздухе как бесплатном товаре не означает, что без него можно обойтись. Это означает лишь, что не имело бы смысла увеличивать данный тип мощности по любой положительной цене и от нескольких единиц этого типа можно было бы освободиться без потерь.

Оценка остальных типов мощностей не столь тривиальна. На рис. 9 возможная ценность 1% мощности по сборке двигателей проградуирована вдоль горизонтальной оси и ценность 1% мощности металлоштамповки проградуирована вдоль вертикальной оси. Теперь рассмотрим любую возможную пару ценностей; скажем, мощность по сборке двигателей стоит 20 тыс. дол. за единицу и по металлоштамповке — 40 тыс. дол. Это представлено точкой A на рис. 9. Применяя полученные оценки к данным, приведенным в I разделе, находим, что ценность мощности, требуемой для производства автомобиля, находится как $0.004 \times 40\,000$ дол. $+ 0.003 \cdot 20\,000$ дол. $= 220$ дол., что намного ниже стоимости производства автомобиля 300 дол.[12] Таким же образом, если мощность по сборке двигателей стоит 60 тыс. дол. за 1% мощности и мощность по металлоштамповке оценивается в 30 тыс. дол. за единицу (точка B), то стоимость (cost) ограниченных ресурсов, требуемых для производства автомобиля, будет в точности равна ценности (value) продукции. Это, очевидно, не единственная комбинация ценности ресурсов, которая будет точно поглощать ценность выпуска продукции, когда ресурсы ис-

[12]Эта единичная ценность есть также предельная ценность, так как затраты на производство постоянны.

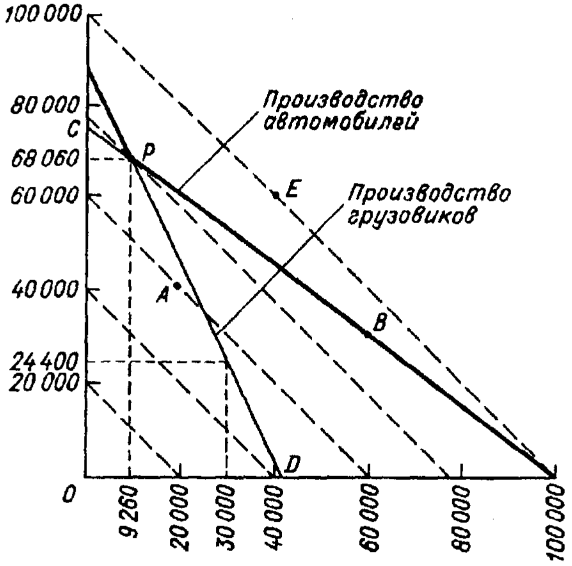

Рис. 9. Пример с автомобилями. Неявные ценности. *По оси абцисс* — ценность единицы мощности по сборке двигателей; *по оси ординат* — ценность единицы мощности металлоштамповки (в дол.).

пользуются для производства автомобилей. Линия производства автомобилей на рис. 9, которая проходит через точку *B*, есть множество всех таких комбинаций ценностей. Аналогичная линия проведена для производства грузовиков, чтобы представить такие комбинации ценностей ресурсов, для которых полная ценность ресурсов, использованных в производстве грузовиков, равна ценности выпущенной продукции. Пересечение этих двух линий, очевидно, представляет собой единственную пару ценностей ресурсов, для которых предельные затраты ресурсов при производстве дополнительного автомобиля равны чистой ценности автомобиля, и то же самое справедливо для грузовиков. Пара может быть найдена с помощью построения или, с большей точностью, алгебраически. Оказывается, что 1% мощности по сборке автомобилей стоит 9259 дол. и 1% мощности металлоштамповки — 68 056 дол.

Каждой паре ценностей для двух типов мощностей соответствует ценность для предприятия в целом. Таким образом, паре ценностей, представленных точкой A, соответствует ценность для предприятия в $100 \cdot 20\,000$ дол. $+ 100 \cdot 40\,000$ дол. $=$ $= 6\,000\,000$ дол. Это не единственная пара ценностей ресурсов, которая дает совокупную ценность предприятия в 6 млн дол. Несомненно, любая пара ценностей ресурсов на прерывистой линии, проходящей через A, соответствует тому же самому значению совокупной ценности предприятия (на настоящем этапе рис. 9 будет напоминать рис. 1). Мы провели несколько прерывистых линий, параллельных только что описанной, каждая из которых соответствует определенному значению совокупной ценности предприятия. Прерывистая линия, которая проходит через пересечение двух линий производства, представляет особый интерес. Измерением или иным способом может быть найдено, что эта линия соответствует ценности предприятия в 7 731 500 дол., которая, напомним, как было установлено, есть максимально достижимый чистый доход.

Рассмотрим значение вменения ценности двум ограничивающим факторам под несколько другим углом. Мы видели, что как только ценность единицы была приписана ресурсам, так совокупная ценность оказалась приписанной предприятию. Можно сделать совокупную ценность предприятия такой низкой, какой мы пожелаем, просто путем приписывания достаточно низких ценностей различным ресурсам. Но если приписанные ценности слишком низки, мы получаем то неудовлетворительное следствие, что некоторые процессы будут приводить к невмененным излишкам. Можно, таким образом, отыскать наинизшую совокупную ценность предприятия, которая может быть задана, все еще не включающую процесса, дающего невмененный излишек. В случае с автомобилями эта ценность есть 7 731 500 дол. На пути нахождения наинизшей приемлемой ценности предприятия мы находим специфические ценности единицы, приписываемые каждому из ресурсов.

В данном примере два процесса и четыре ограниченных ресурса. Из этого вытекает, что только два ресурса были эффективно ограничивающими, остальные были в относительно достаточном количестве. В общем случае характеристики решения задачи программирования зависят от соотношения между числом ограниченных ресурсов и числом процессов, принимаемых к рассмотрению. Если, как в настоящем примере, число ограниченных ресурсов превышает число процессов, это обычно ведет к тому, что некоторые из ресурсов будут иметь вмененные ценности, равные нулю, и что число ресурсов с положительными вмененными ценностями будет равно числу процессов.[13] Если число ограниченных ресурсов равно числу процессов, то все ресурсы будут иметь положительные вмененные ценности. Если, наконец, число процессов превышает число ограниченных ресурсов, некоторые процессы не будут использоваться в оптимальной программе. Данная ситуация, которая является обычной, была проиллюстрирована на рис. 6. В этом случае общая вмененная ценность поглощенных ресурсов будет равна чистому доходу для некоторых процессов и будет превышать его для остальных. Число процессов, для которых вмененная ценность поглощенных ресурсов равна чистому доходу, будет как раз равно числу ограниченных ресурсов, и процессы, для которых равенство поддерживается, будут появляться при положительных значениях в оптимальной программе. Короче говоря, определение минимально допустимой ценности предприятия является тем же, что и определение оптимальной производственной программы. Задача программирования и задача определения ценности не просто тесно связаны, они принципиально одинаковы.

Это можно увидеть на графиках при сравнении рис. 1 и 9. Каждый рисунок содержит две оси и две диагональные граничные линии. Но граничные линии на рис. 9 относятся к тем же процессам, к которым относятся оси на рис. 1, и оси на рис. 9 относятся к тем же ресурсам, к которым относятся диагональные граничные линии на рис. 1. Более того, при использовании рис. 1 мы нашли чистый доход, соответствующий наивысшей прерывистой линии, касающейся границы; при использовании рис. 9 мы нашли совокупную ценность, соответствующую наинизшей прерывистой линии, которая имеет любые точки на или вне границы; и оба результата оказываются одинаковыми. Формально установлено, что эти два рисунка и задачи, которые они представляют, являются *двойственными* по отношению друг к другу.

Двойственность есть очень полезное свойство при решении задач математического программирования. Простейший путь за-

[13] Мы говорим «обычно» в этом предложении, потому что в некоторых особых обстоятельствах число ресурсов с положительными вмененными ценностями может превышать число ресурсов.

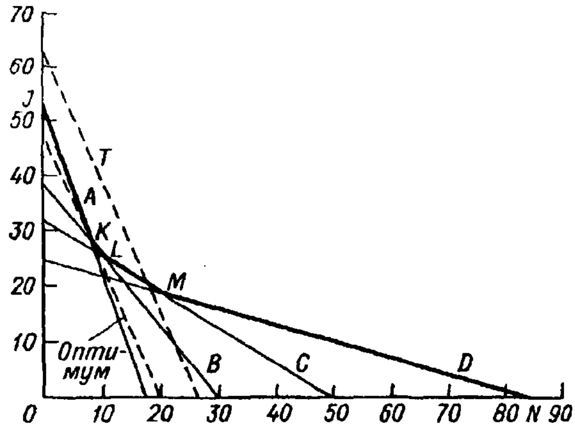

Рис. 10. Проблема ценности. Четыре процесса.
По оси абцисс — ценность единицы труда; *по оси ординат* — ценность единицы капитала (в дол.).

метить это состоит в том, что, когда мы встречаемся с задачей математического программирования, у нас есть выбор решать саму задачу или двойственную ей, в зависимости от того, что проще. При любом варианте получим одни и те же результаты. Можно использовать теперь это свойство, чтобы несколько обобщить наше обсуждение. До сих пор, имея дело с более чем двумя процессами, мы должны были использовать относительно усложненные диаграммы типа рис. 6, потому что прямые диаграммы, как рис. 1, не содержали достаточного количества осей, чтобы представить уровни процессов. Теперь мы можем использовать диаграммы, созданные по образцу рис. 9, чтобы описать задачи с любым числом процессов до тех пор, пока они не включают более чем два ограниченных ресурса. Рис. 10 показывает диаграмму для четырех процессов, и он получен, несомненно, из рис. 6. На рис. 10 линия A представляет все пары ценностей ресурсов, таких, при которых процесс A не давал бы ни прибыли, ни потерь. Линии B, C и D имеют ту же интерпретацию. Прерывистая линия T есть линия, вдоль которой совокупная ценность труда и капитала, могущих быть использованными фирмой (или отраслью), постоянна. Ее положение несущественно для анализа; имеет значение только ее наклон, который есть просто отношение количества доступного труда к количеству доступного капитала. Ломаная линия $JKLMN$ делит рисунок на две области. Все точки на или выше нее представляют пары ценности ресурсов таких, при которых один процесс не приводит к невмененным излишкам. Назовем эту область допустимой. Для каждой точки ниже этой ломаной линии существует по крайней мере один процесс, который обладает невмененным излишком. Это недопустимая область. Ищем точку в допустимой области, которая соответствует наинизшей совокупной ценности предприятия. Эта точка, конечно, даст набор ценностей ресурсов, который делает бухгалтерскую прибыль фирмы столь большой, сколь только это возможно, не приводя к какому-либо невмененному доходу. Точка, удовлетворяющая таким требованиям, есть K, и прерывистая линия, параллельная T, проведена через нее, чтобы указать минимально допустимую совокупную ценность предприятия.

В точке K процессы A и B дают нулевую прибыль и процессы C и D приводят к потерям. Следовательно, процессы A и B есть единственные, которые следует использовать, т.е. в точности так, как мы получили на рис. 6. Конечно, эта диаграмма говорит об уровнях, на которых должны быть использованы процессы A и B, несколько меньше, чем рис. 6, который дает оценки для двух ресурсов. Но нахождение уровней, после того как процессы выбраны, представляет собой сравнительно тривиальную вещь. Все, что необходимо, — это определить уровни, которые будут полностью использовать ресурсы, не являющиеся бесплатными благами. Это может быть сделано алгебраически или с помощью диаграммы, подобной рис. 8.

VI. Приложения

В I разделе мы утверждали, что основной причиной использования математического программирования была необходимость в методе анализа, который был бы пригоден для практического решения повседневных проблем бизнеса и экономики в целом. Сразу после этого заявления мы представили весьма искусственную задачу, сопровождавшуюся довольно пространным обсуждением абстрактных и формальных соотношений. Теперь пришло время указать основания, позволяющие говорить, что математическое программирование является практическим методом анализа.

Существенное упрощение, достигнутое в математическом программировании, есть замена понятия производственной функции понятием процесса. Процесс есть легкообозримая единица хозяйственной деятельности, и эмпирические константы, которые его характеризуют, могут быть оценены без сложного анализа. Больше того, во многих отраслях структура производства соответствует выполнению последовательности процессов в том смысле, как мы их понимаем. Множество промышленных решений, как остановка оборудования или введение дополнительной смены, соответствуют естественным образом нашей концепции выбора уровня задействования процесса. Короче говоря, математическое программирование создается по образцу действительной структуры производства в надежде, что оно в связи с этим будет включать только наблюдаемые постоянные и непосредственно контролируемые переменные.

Оправдалась ли эта надежда? Литература уже содержит сообщение об успешном приложении к очистке нефти.[14] Я сделал аналогичное приложение, которое, может быть, будет нести элементы описания. Приложение было к очистному заводу среднего размера, который производит обычный и высококачественный сорта автомобильного бензина. Существенной изучаемой операцией было смешивание. Десять химически различных видов полуочищенной нефти, называемых смешиваемым «сырьем», перемешиваются вместе. Результатом является товарный бензин, чьи характеристики отвечают приблизительно средневзвешенным характеристикам смешиваемого сырья. Например, если 500 галлонов сырья с октановым числом 80 смешиваются с 1000 галлонов сырья с октановым числом 86, то результатом будет $500+1000=$ $=1500$ галлонов продукта с октановым числом $1/3\cdot 80+2/3\times$ $\times 86=84$.

Существенный аспект для наших целей состоит в том, что основные характеристики бензиновой смеси — ударный коэффициент, давление паров, содержание свинца и т. п. — могут быть представлены как линейные функции количества различных использованных видов сырья. То же можно сказать о стоимости смеси, если каждый из видов смешиваемого сырья имеет определенную цену за галлон. Таким образом, проблема нахождения смеси минимальной стоимости, которая будет удовлетворять

[14] *Charnes A., Cooper W. W., Mellon B.* Blending Aviation Gasolines // Econometrica. 1952. Vol. 20. Apr.

данным условиям по качеству, есть задача математического программирования.

Более того, на этом очистном заводе количества некоторых видов сырья определенно ограничены контрактами и возможностями мощностей по очистке. Тогда возникает проблема: каковы наиболее выгодные объемы выпуска обычного и высококачественного бензина и сколько каждого типа сырья для смешивания следует использовать для каждого конечного продукта. Эта проблема аналогична искусственному примеру с автомобилями с дополнительным усложнением спецификации по качеству. Проблема слишком сложна для графического анализа, но была легко решена с помощью арифметической процедуры. Насколько известно, математическое программирование дает единственный способ решения таких проблем. Чарнес и Купер недавно опубликовали решение аналогичной задачи, которая возникла в работе металлообрабатывающей фирмы.[15]

Совершенно отличный тип проблемы, также поддающийся решению методом математического программирования, возникает в производстве газетной бумаги. Стоимость перевозки — один из важнейших элементов в стоимости газетной бумаги. Одна крупная компания по производству газетной бумаги имеет шесть фабрик, широко рассеянных в Канаде, и около 200 потребителей, широко рассеянных в Соединенных Штатах. Ее задача состоит в том, чтобы решить, сколько газетной бумаги перевозить от каждой фабрики каждому потребителю так, чтобы, во-первых, удовлетворить требования контракта с каждым потребителем, во-вторых, остаться в рамках ограниченных мощностей каждой фабрики и, в-третьих, поддерживать совокупные расходы по перевозкам насколько возможно малыми. Эта проблема включает 1200 переменных (6 фабрик $\times$ 200 потребителей) в отличие от двух или четырех переменных в задачах, которые мы обсуждали. В окончательном решении большинство переменных окажутся равными нулю, но вопрос в том, какие именно. Эта задача решается с помощью математического программирования и, хотя и громоздка, в действительности не настолько, как следует из подсчета переменных.

[15] *Charnes A., Cooper W. W., Farr D. a. oth.* Linear Programming and Profit Preference Scheduling for a Manufacturing Firm // Journ. Operations Research Soc. Amer. 1953. Vol. 1. May.

Эти немногие иллюстрации достаточны, чтобы показать, что математическое программирование есть практический инструмент планирования в бизнесе. Они показывают также, что это гибкий инструмент, поскольку оба примера расходились с базовым примером, использованным в нашем изложении. Приложение к нефтепереработке имело дополнительные черты, связанные со спецификацией по качеству. В приложении к производству газетной бумаги были ограничения на количество готовой продукции, так же как и на количества исходных ресурсов. Тем не менее математическое программирование легко справляется с обоими случаями.

С другой стороны, следует отметить, что оба примера были мелкомасштабными, в них мы имели дело с единственной фазой производства одной фирмы. Я полагаю, что это справедливо для всех успешных приложений в настоящее время. Математическому программированию еще предстоит долгий путь решения крупных проблем планирования для целых отраслей или экономики в целом. Но многие такие крупные проблемы — просто расширенные версии задач, которые встречаются и решаются в случае одной фирмы. Будет не слишком преждевременным сказать, что математическое программирование доказало свою ценность как практический инструмент для нахождения оптимальных экономических программ.

VII. Заключение

Наша цель состояла только в том, чтобы ввести основные понятия математического программирования и придать им правдоподобие и смысл. Читатель, который хотел бы научиться решать проблемы программирования, даже самые простейшие, вынужден будет обратиться к другим источникам,[16] но и настоящая статья может служить полезной основой.

---

[16]Стандартная ссылка: *Koopmans T. C.* (Ed.) Activity Analysis of Production and Allocation. New York, 1951. Менее продвинутое изложение может быть найдено в кн.: *Charnes A., Cooper W. W., Henderson A.* An Introduction to Linear Programming. New York, 1953, и в моей собственной работе: *Dorfman R.* Application of Linear Programming to the Theory of the Firm. Berkeley, 1951.

Хотя в нашем изложении методы решения опущены, мы должны подчеркнуть, что эти методы являются фундаментальными для всей концепции математического программирования. Около восьмидесяти лет назад Вальрас понимал производство в очень большой степени так же, как адепты математического программирования, позже А. Вальд и Дж. фон Нейман использовали эту точку зрения на производство и методы, очень близкие к методам математического программирования, для анализа условий общего экономического равновесия.[17] Данные работы, однако, должны рассматриваться скорее как предвестники математического программирования. Программирование не имело независимого существования как вид экономического анализа до 1947 г., когда Дж. Б. Данциг предложил «симплекс-метод» решения, который сделал доступным практическое приложение.[18] Существование метода, посредством которого экономические оптимумы могли быть точно вычислены, стимулировало исследования по экономической интерпретации математического программирования и привело к развитию альтернативных методов решения. Тот факт, что проблемы экономики и бизнеса, будучи сформулированы в терминах математического программирования, могут быть решены численно, определяет важность этого метода. Таким образом, отсутствие в настоящем обсуждении методов решения не должно быть принято как знак того, что они представляют вторичный интерес.

Мы рассмотрели только несколько концепций, использованных в математическом программировании, и имели дело только с одним типом проблем программирования. Немногие понятия, которые мы рассмотрели, однако, являются базовыми; все остальное в математическом программировании есть их разра-

---

[17] Формулировка Вальраса содержится в «Éléments d'économie politique pure ou théorie de la richesse sociale» (2nd ed. Lausanne, 1889. 20e leçon). Труды А. Вальда и Дж. фон Неймана появились первоначально в «Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums» (N 6–8). Последняя техническая статья А. Вальда напечатана в «Zeitschrift für Nationalökonomie» (1936. Bd. 7) и была переведена как «On some Systems of Equations of Mathematical Economics» (Econometrica. 1951. Vol. 19. Oct.) Основная статья фон Неймана появилась в переводе как «A Model of General Economic Equilibrium» (Rev. Econ. Stud. 1945–1946. Vol. 13).

[18] *Dantzig G. B.* Maximization of Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities // *Koopmans T. C.* (Ed.). Activity Analysis of Production and Allocation.

ботка и развитие. Представляется целесообразным упомянуть два направления совершенствования метода, так как они устраняют или ослабляют два наиболее жестких допущения, которые здесь были сделаны.

Первое из этих направлений есть введение в анализ времени. Настоящее изложение имело дело с одним изолированным периодом производства. Но в большинстве случаев последовательные производственные периоды являются взаимосвязанными. Это так, например, в случае вертикально объединенных фирм, где выполнение некоторых процессов в один период ограничивается уровнями выполнения в предшествующий период процессов, которые их снабжают полуфабрикатами. Эффективные методы анализа таких «динамических» задач в настоящее время изучаются в особенности Джорджем Данцигом.[19] Хотя настоящее обсуждение относилось к статике, методы анализа могут быть приложены к задачам с зависимостью от времени.

Второе направление состоит в допущении изменений цен на ресурсы и конечную продукцию. В нашем изложении мы рассматривали все цены как неизменные и не зависящие от действия экономических единиц, которые мы принимали во внимание. Постоянные цены — несомненно большое удобство для аналитика, но метод при необходимости может выходить за рамки этого допущения. Общая математическая теория, имеющая дело с переменными ценами, исследована,[20] и развиты практические методы решения для задач, в которых кривые спроса и предложения линейны.[21] Предположение о постоянстве цен, может быть наиболее жесткое допущение, сделанное нами, использовалось скорее для удобства, нежели по необходимости.

Математическое программирование развивалось в первую очередь как инструмент экономического и делового планирования, а не для целей описания и предсказания, которым служит предельный анализ. Тем не менее оно в действительности

---

[19] *Dantzig G. B.* A Note on a Dynamic Leontief Model with Substitution (abstr.) // Econometrica. 1953. Vol. 21. Jan. P. 179.

[20] См.: *Kuhn H. W., Tucker A. W.* Non-Linear Programming // *Neyman J.* (Ed.). Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley, 1951.

[21] Я сообщал об одном из решений этой задачи на семинаре в Массачусетсском технологическом институте в сентябре 1952 г. Могут быть известны и другие решения.

имеет прогностическое значение. До тех пор пока фирмы работают в условиях, предполагаемых математическим программированием, было бы неразумным полагать, чтобы они действовали так, как если бы работали в условиях, предполагаемых предельным анализом. Рассмотрим, например, автомобильную фирму (рис. 1). Как бы она отреагировала, если бы цены автомобилей упали, скажем, на 50 дол. за штуку? В этом случае чистый доход с автомобиля был бы 250 дол., т. е. таким же, как чистый доход с грузовиков. На диаграмме результат свелся бы к повороту линии равного дохода так, чтобы ее наклон составлял 45°. После этого поворота точка C оставалась бы оптимумом, и такое изменение цен не вызвало бы изменений в оптимальном выпуске продукции. Математическое программирование приводит, таким образом, к ломаной линии предложения.

С другой стороны, предположим, что цена автомобилей возросла на 50 дол. На диаграмме такое изменение цены уменьшило бы крутизну линии равного дохода так, что она оказалась бы в точности параллельной линии металлоштамповки. Фирма оказалась бы в положении, похожем на то, что иллюстрируется линией YY' на рис. 5. Планы производства, соответствующие точкам на отрезке DC (рис. 1), давали бы одинаковый чистый доход и были бы оптимальными. Если бы цены автомобилей возросли более чем на 50 дол. или возрастание цены автомобиля на 50 дол. сопровождалось бы падением цены грузовиков, то точка оптимального производства скачком перешла бы из положения C в положение D.

Таким образом, математическое программирование показывает, что фирмы, у которых возможности выбора ограничены лишь несколькими процессами, будут реагировать на изменение цен дискретно: они будут нечувствительны к изменению цен в некотором интервале и будут резко менять уровни производства, как только данный интервал будет пройден. Этот теоретический вывод, конечно, имеет реальные прообразы.

Связь между математическим программированием и экономикой благосостояния является особенно тесной. Экономика благосостояния изучает оптимальную организацию экономических усилий, то же делает математическое программирование. Эта связь была специально исследована Купмансом и Самуэльсоном.[22] Результатом, установленным в общем виде, является то, что положение равновесия полностью конкурентной экономики оказывается тем же самым, что оптимальное решение задачи математического программирования, содержащей те же данные.

Математическое программирование очень близко математически к методу анализа затраты—выпуск или межотраслевому анализу, развитому в значительной мере В. В. Леонтьевым.[23] Два метода были развиты независимо друг от друга, однако важно различать их концептуально. Метод анализа затраты—выпуск находит приложения главным образом исключительно при изучении общего экономического равновесия. Он предполагает, что экономика разделена на ряд отраслевых секторов, каждый из которых аналогичен процессу в том смысле, как используется этот термин в математическом программировании. В этом случае он принимает какую-либо из двух форм. В «открытых моделях» анализ затраты—выпуск начинается с некоторого определенного конечного спроса на продукцию каждого сектора и позволяет найти те уровни, на которых каждый из секторов-процессов должен работать, чтобы удовлетворить данной структуре конечного спроса. В «закрытой модели» конечный спрос не фигурирует, но внимание концентрируется на том факте, что вводимые ресурсы, требуемые каждым сектором-процессом, должны быть конечной продукцией других секторов-процессов. Анализ затраты—выпуск в этом случае определяет взаимно согласованный набор уровней производства различных секторов. Наоборот, в математическом программировании условия, налагаемые в анализе затраты—выпуск, являются достаточными для определения уровней процессов и не существует простора для нахождения оптимального решения или набора «наилучших» уровней. Несомненно, анализ затраты—выпуск может рассматриваться как особый случай математического программирования, в котором число продуктов равно числу процессов. С другой стороны, ограничения на поставки ресурсов, которые играют столь важную роль в математическом программировании, в анализе затраты—

---

[22] *Koopmans T. C.* Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities // *Koopmans T. C.* (Ed.). Activity Analysis of Production and Allocation; *Samuelson P. A.* Market Mechanisms and Maximization (статья, подготовленная для «Rand Corporatin», 1949).

[23] *Leontief W. W.* The Structure of American Economy 1919–1939. 2nd ed. New York, 1951.

выпуск явно не учитываются. В целом представляется наилучшим рассматривать эти две техники как близкие, но различающиеся методы анализа, обращенные к различным проблемам.

Математическое программирование, таким образом, имеет значение как для экономического мышления и теории, так и для бизнеса и экономического планирования. Нам удалось только упомянуть об этом значении. Действительно, не говоря об исследованиях, связанных с благосостоянием, очень немного работ было уделено следствиям математического программирования для экономики в целом, потому что наибольшие усилия были посвящены решению многочисленных практических задач, к которым оно приводит. Есть и перспектива для плодотворных исследований как значения, так и приложений математического программирования.